39) J. H. H. Perk and C. L. Schultz, preprint.
40) R. J. Baxter, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V,* E. G. D. Cohen ed. (North-Holland, 1980) p. 109.
41) F. Y. Wu, Phys. Rev. **B4** (1971) 2312.
42) L. P. Kadanoff and F. J. Wegner, Phys. Rev. **B4** (1971) 3989.
43) R. B. Potts, Proc. Camb. Phil. Soc. **48** (1952) 106.
44) J. Ashkin and E. Teller, Phys. Rev. **64** (1943) 178.
45) R. J. Baxter, J. Phys. **A13** (1980) L61.
46) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1982) 35.
47) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1981) 37.
48) 例えば，J. D. Weeks, in *Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems,* T. Riste ed. (Plenum, 1980) p. 293.
49) A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **79** (1981) 489.
50) V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov, preprint.
51) M. T. Jaekel and J. M. Maillard, J. Phys. **A15** (1982) 1309.
52) K. Sogo and Y. Akutsu, preprint.

アインシュタイン方程式のベックルント変換

筑波大物理　表　實

相対論的な重力場の方程式（Einstein 方程式）は次式で与えられる

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=kT^{\mu\nu}。$$

ここで $R^{\mu\nu}$, R は計量テンソル $g_{\mu\nu}$（$ds^2=g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}$）の２階微分までを含む曲率テンソル。$T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルであり，又 κ（$=\frac{8\pi}{c^4}G=2.07\times10^{-48}$ s/g cm）はアインシュタイン定数と呼ばれる。この式を孤立した物体がその外部に作る重力場に適用したときに得られる解（外部解）を厳密に求める方法の一つについて報告する。

外部解を求めるためには，いろいろな対称性（例；球対称解＝Schwarzshild の解）が要請されてきたが，ここではいままで使われた要請をその特別な場合として含むところの定常か

つ軸対称性を要求する。このとき計量は

$$ds^2 = f^{-1}\{e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2\} - f(cdt - \omega d\varphi)^2,$$

となる。ここでf, ω, γはρとzの関数である。アインシュタイン方程式からf，ωの連立非線型方程式とγについての線型方程式が得られる。従って厳密解を求める問題はf, ωの連立方程式を解くことに帰着し，その方程式は次の非線型方程式（Ernst方程式）にまとめられる。

$$\partial_1\partial_2 E = -\frac{1}{4\rho}(\partial_1 E + \partial_2 E) + \frac{2}{E+E^*}\partial_1 E\,\partial_2 E,$$

但し$x_1 = \rho - iz$，$x_2 = \rho + iz$。ここでEはErnst potentialと呼ばれる複素関数であり次式で定義される

$$E = f + i\psi,$$

但し$\partial_1\omega = \frac{i\varphi}{f^2}\partial_1\psi$，$\partial_2\omega = -\frac{i\rho}{f^2}\partial_2\psi$。

アインシュタイン方程式は，その方程式を不変に保ついろいろな変換を持っていることが知られている。そのうち次の２つの変換が重要である。

1. Ehlers変換

$$f' = \frac{\beta\psi}{(1-\gamma\psi)^2 + \gamma^2 f^2}\quad,\qquad \psi' = \frac{\beta\psi - \beta\gamma(f^2+\psi^2)}{(1-\gamma\psi)^2 + \gamma^2 f^2} + i\alpha,$$

但しα, β, γは任意の実定数。この変換はEを使って

$$E' = \frac{\beta E}{1 + i\gamma E} + i\alpha,$$

と書ける。

2. Killingベクトルの回転による変換

$$f' = af\left\{(1+b\omega)^2 - b^2\frac{\rho^2}{f^2}\right\},\qquad \omega' = \frac{1}{a}\,\frac{\omega(1+b\omega) - b\dfrac{\rho^2}{f^2}}{(1+b\omega)^2 - b^2\dfrac{\rho^2}{f^2}} + c,$$

但しa, b, cは実定数。

後者の変換はEの変換としては表わせないことに注意する必要がある。しかしながら，これらの変換はErnst方程式のベックルント変換という観点から，統一的に議論されること，更にこれらを特別なケースとして含む一般化された変換が存在することが示される。

Ernst方程式のベックルント変換は次の式で与えられるものと仮定する。

$$\partial_1 E' = a_1 \partial_1 E + a_2,$$
$$\partial_2 E' = b_1 \partial_2 E + b_2。$$

ここでa_i, b_i $(i=1,2)$は$E, E^*, E', E'^*, x_1, x_2$の関数であり，その具体的な形は次の２つの要請から決められる。

1. E'は積分可能条件をみたす$(\partial_1\partial_2 E' = \partial_2\partial_1 E')$。
2. E'はErnst方程式の解である。

この要請のとき，EはErnst方程式の解であることは仮定されている。この要請から，４種類のベックルント変換が存在することがわかる。

ⅰ）B.T.Ⅰ

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f}\,\partial_1 E,\quad \partial_2 E' = \frac{f'}{f}\,\partial_2 E。$$

積分して$E' = cE + d$，但しc, dは積分実定数。

ⅱ）B.T.Ⅱ

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f}\,\frac{2+\theta_1+\sqrt{\theta_1^2+4\theta_1}}{2}\,\partial_1 E,\qquad \partial_2 E' = \frac{f'}{f}\,\frac{2+\theta_1+\sqrt{\theta_1^2+4\theta_1}}{2}\,\partial_2 E,$$

但し$\theta_1 = ff'$。次の式で定義される補助関数（pseudo potential）ϕ_1

$$\partial_1 \phi_1 = \frac{\phi_1 - 1}{2f}(\phi_1 \partial_1 E + \partial_1 E^*),\qquad \partial_2 \phi_1 = \frac{\phi_1 - 1}{2f}(\phi_1 \partial_2 E + \partial_2 E^*),$$

をつかって，上の変換は

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f}\,\phi_1 \partial_1 E,\qquad \partial_2 E' = \frac{f'}{f}\,\phi_1 \partial_2 E$$

とかける。これは積分できて

$$\phi_1 = \frac{1 - \mathrm{i}\gamma E^*}{1 + \mathrm{i}\gamma E}\ ,\quad E' = \frac{\beta E}{1 + \mathrm{i}\gamma E} + \mathrm{i}\alpha。$$

この結果，B.T.Ⅱ はEhlersの変換を行うことがわかる。

iii) B.T.Ⅲ

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f}\,\frac{2\theta_2+1+\sqrt{4\theta_2+1}}{2\theta_2}\,\partial_1 E - \frac{f'}{4\rho}\,\frac{1+\sqrt{4\theta_2+1}}{\theta_2}\ ,$$

$$\partial_2 E' = \frac{f'}{f}\,\frac{2\theta_2+1-\sqrt{4\theta_2+1}}{2\theta_2}\,\partial_2 E - \frac{f'}{4\rho}\,\frac{1-\sqrt{4\theta_2+1}}{\theta_2},$$

但し $\theta_2 = \frac{1}{\rho^2} f f'$。補助関数 ϕ_2

$$\partial_1 \phi_2 = -\frac{\phi_2-1}{2f}(\phi_2\,\partial_1 E + \partial_1 E^*) + \frac{1}{4\rho}(\phi_2-1)(\phi_2+1),$$

$$\partial_2 \phi_2 = -\frac{\phi_2-1}{2f}(\partial_2 E + \phi_2\,\partial_2 E^*) + \frac{1}{4\rho}(\phi_2-1)(\phi_2+1),$$

を使って

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{f}\,\phi_2\,\partial_1 E + \frac{f'}{2\rho}(1-\phi_2), \qquad \partial_2 E' = \frac{f'}{f}\,\frac{1}{\phi_2}\,\partial_2 E + \frac{f'}{2\rho}\,\frac{\phi_2-1}{\phi_2}\ ,$$

と表わせる。この変換は E の関数としては積分できないが，f, ω の関数として

$$\phi_2 = \frac{1+b\left(\omega+\frac{\rho}{f}\right)}{1+b\left(\omega-\frac{\rho}{f}\right)}$$

$$f' = af\left\{(1+b\omega)^2 - b^2\frac{\rho^2}{f^2}\right\}, \qquad \omega' = \frac{1}{a}\,\frac{\omega(1+b\omega) - b\frac{\rho^2}{f^2}}{(1+b\omega)^2 - b^2\frac{\rho^2}{f^2}} + c$$

となる。すなわちB.T.Ⅲ はKillingベクトルの回転によって起る変換を行う。

iv) B.T.Ⅳ

$$\partial_1 E' = \frac{f'}{2f\theta_3}\left\{(1-\zeta^2)(\theta_3^2+1) + 2\zeta^2\theta_3 + (1-\zeta^2)(\theta_3-1)\sqrt{\theta_3^2+2\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\theta_3+1}\right\}\partial_1 E$$
$$+\frac{f'(1-\zeta^2)}{4\rho\,\theta_3}\left\{\theta_3 - 1 + \sqrt{\theta_3^2+2\,\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\,\theta_3+1}\right\},$$

$$\partial_2 E' = \frac{f'}{2f\theta_3\zeta^2}\left\{(1-\zeta^2)(\theta_3^2+1) + 2\theta_3 + (1-\zeta^2)(\theta_3+1)\sqrt{\theta_3^2+2\,\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\,\theta_3+1}\right\}\partial_2 E$$
$$-\frac{f'(1-\zeta^2)}{4\rho\theta_3\zeta^2}\left\{\theta_3 + 1 + \sqrt{\theta_3^2+2\,\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\,\theta_3+1}\right\},$$

表　實

但し $\theta_3=\frac{\mathrm{i}}{\rho}ff'$， $\zeta^2=\frac{\mathrm{i}\,\ell-x_2}{\mathrm{i}\,\ell+x_1}$ 。任意定数 ℓ はErnst方程式が持つ z 軸の原点のとり方の任意性に対応する。この変換に対しては2種類の補助関数 ϕ_3 と $\widetilde{\phi}_3$ を導入することが可能で，各々次の方程式で定義される。

$$\begin{cases} \partial_1\phi_3=-\frac{1}{2f}\{\phi_3(1+\zeta\phi_3)\partial_1E+(\zeta+\phi_3)\partial_1E^*\}, \\ \partial_2\phi_3=\frac{1}{2f\zeta}\{\phi_3(\zeta+\phi_3)\partial_2E-(1+\zeta\phi_3)\partial_2E^*\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1\widetilde{\phi}_3=\frac{1}{2f}\{\widetilde{\phi}_3(1+\zeta\widetilde{\phi}_3)\partial_1E-(\widetilde{\phi}_3+\zeta)\partial_1E^*\}-\frac{\zeta}{4\rho}(\widetilde{\phi}_3-1)(\widetilde{\phi}_3+1), \\ \partial_2\widetilde{\phi}_3=\frac{1}{2f\zeta}\{-(1+\zeta\widetilde{\phi}_3)\partial_1E+\widetilde{\phi}_3(\widetilde{\phi}_3+\zeta)\partial_1E^*\}-\frac{1}{4\rho\zeta}(\widetilde{\phi}_3-1)(\widetilde{\phi}_3+1)。 \end{cases}$$

ϕ_3，$\widetilde{\phi}_3$ を使って B.T.Ⅳは

$$\begin{cases} \partial_1E'=-\frac{f'}{f}\frac{\phi_3(1+\zeta\phi_3)}{\phi_3+\zeta}\partial_1E+\frac{f'}{2\rho}\frac{\phi_3(1-\zeta^2)}{\phi_3+\zeta}, \\ \partial_2E'=-\frac{f'}{f}\frac{\phi_3(\zeta+\phi_3)}{1+\zeta\phi_3}\partial_2E-\frac{f'}{2\rho}\frac{\phi_3(1-\zeta^2)}{\zeta(1+\zeta\phi_3)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1E'=-\frac{f'}{f}\frac{\widetilde{\phi}_3(1+\zeta\widetilde{\phi}_3)}{\widetilde{\phi}_3+\zeta}\partial_1E+\frac{f'}{2\rho}(1+\zeta\widetilde{\phi}_3), \\ \partial_2E'=-\frac{f'}{f}\frac{1+\zeta\widetilde{\phi}_3}{\widetilde{\phi}_3(\widetilde{\phi}_3+\zeta)}\partial_2E+\frac{f'}{2\rho\widetilde{\phi}_3\zeta}(1+\zeta\widetilde{\phi}_3), \end{cases}$$

と表わされる。上式を $1/\ell$ の巾で展開して，その第一項のみを残したとき，ϕ_3 を使った表式はB.T.Ⅱに，$\widetilde{\phi}_3$ を使った表式はB.T.Ⅲに一致する。

以上のことからB.T.Ⅳは，すでに知られていたEhlers変換とKillingベクトルの回転による変換をその特別なケースとして含む，より一般化された変換であることがわかる。更にこのベックルント変換から逆散乱法のLax pairが導かれることも知られている。ソリトンの物理で有効であった方法が，アインシュタインの方程式の厳密解を求める際にも有効な方法であることが示されたわけである。